

ALGEBRA M1 – LISTA 2

Liczby zespolone

1. Wyznaczyć postać trygonometryczną podanych liczb zespolonych:

$$(a) -3i, \quad (b) 1 + \sqrt{3}i, \quad (c) 2 - 2\sqrt{3}i, \quad (d) \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^3, \quad (e) \frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, obliczyć

$$(a) (1 + i)^{11}, \quad (b) (2 - 2\sqrt{3}i)^7, \quad (c) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{10}.$$

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić wzór

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

4. Korzystając z zadania 3, uzasadnić wzory

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$
$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, wyrazić $\cos 4x$ oraz $\sin 4x$ przez funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$.

6. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb zespolonych spełniających warunki

$$(a) \operatorname{Im}(z^3) < 0, \quad (b) \operatorname{Re}(z^4) \geq 0, \quad (c) \operatorname{Im}(z^2) \geq \operatorname{Re}((\bar{z})^2), \quad (d) \operatorname{Im}\frac{(1+i)z}{(1-i)\bar{z}} \geq 0,$$

$$(e) |z + i| = 5, \quad (f) |z - 1| < 3, \quad (g) 1 \leq |z + i| \leq 2, \quad (h) |z - i| = |z + i|.$$

7. Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki na argument główny

$$(a) \operatorname{Arg}((1+i)z) = \frac{3\pi}{2}, \quad (b) \operatorname{Arg}(z^4) = \pi, \quad (c) \frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z^3) < \frac{\pi}{2}$$

8. Wyprowadzić wzór na $\sqrt{a + ib}$, korzystając z postaci algebraicznej liczb zespolonych.

9. Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki

$$\sqrt{3 - 4i}, \quad \sqrt{-3 - 4i}, \quad \sqrt{1 - i\sqrt{3}}, \quad \sqrt[6]{1}, \quad \sqrt[3]{2 + i}, \quad \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

10. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równania

$$(a) z^2 + z + 1 = 0, \quad (b) z^2 - 5z + (7 + i) = 0, \quad (c) z^4 - 2z^2 + 4 = 0, \quad (d) \bar{z} = z^4.$$

$$(e) z^4 = 1, \quad (f) z^6 = (1 + 2i)^{12}, \quad (g) z^3 = (1 - i)^3, \quad (h) (z - i)^4 = (iz + 4)^4,$$

w trzech ostatnich przykładach odgadując jedno z rozwiązań.

11. Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\bar{z}w \neq 1$ oraz $|z| = 1$ lub $|w| = 1$. Pokazać, że wtedy

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1$$

12. Dowieść, że dla pierwiastków w_0, w_1, \dots, w_{n-1} stopnia n z jedności, gdzie $n \geq 2$, zachodzą równości

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = 0$$

$$w_0 w_1 \dots w_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

13. Pokazać, że wszystkie pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej z można otrzymać, mnożąc jeden z nich przez wszystkie pierwiastki stopnia $n \in \mathbb{N}$ z jedności.

14*. Sprowadzić do postaci $f(x, y) + ig(x, y)$ funkcje zmiennej zespolonej $z = x + iy$ postaci

$$h(z) = \frac{1}{1 - z^n}, \quad k(z) = \frac{1}{1 + e^z}$$

dla wszystkich z , dla których te funkcje są zdefiniowane.

15*. Pierwiastek n -tego stopnia z jedności w_k jest *pierwotny* jeżeli $w_k^j \neq 1$ dla każdego $1 \leq j < n$. Pokazać, że jeżeli w_k jest pierwiastkiem pierwotnym n -tego stopnia z jedności, to każdy pierwiastek n -tego stopnia z jedności ma postać w_k^p , gdzie $p \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

16*. Pokazać, że liczba w_k jest pierwiastkiem pierwotnym n -tego stopnia z jedności wtedy i tylko wtedy gdy liczby k oraz n są względnie pierwsze.

Romuald Lenczewski